DSEVARMA モデルの周波数領域に於ける有効推定法

杉　原　左　右　一

I　序

動的同時方程式モデル（DSE モデル）[1] は、計量経済学的分析の中核をなすモデルとして現在広範な分野に極めて有効に適用されている事は周知のところであるが、同時に、これまでの実証的分析を通して、従来の DSE モデルに種々の制約のある事も次第に認識されており、より実際的なモデルへと様々な検討が加えられつつある。

本稿は、拙稿〔18〕に引き続き、DSE モデルに於て、攪乱項が独立、同一分布に従うとする従来の仮定を緩和し、これに代わって攪乱項にベクトル自己回帰・移動平均過程（VARMA 過程）[2] を想定した “DSEVARMA モデル” (Dynamic Simultaneous Equations Model with VARMA disturbances) を構築する事により、DSE モデルの構造母数と共に攪乱項の確率的構造を推定する事を意図するものである。

なお、同種の立場に立つモデルに関して、主に母数の有効推定法を明らかにしているものとして、例えば、Hannan and Terrell〔9〕, Hatanaka〔12〕, Nicholls〔14〕, Kohn〔13〕, Reinsel〔15〕及び拙稿〔18〕をあげる事が出来よう。

このうち Hannan and Terrell〔9〕は、攪乱項が定常過程に従う同時方

1) Dynamic Simultaneous Equations Model.
2) Vector Autoregressive-Moving Average Process.

程式モデルの、周波数領域における有効推定法を明らかにしている。これに対して、攪乱項にパラメトリックなモデルを想定し、その確率的構造を推定するものとして、先ず（i）VARARX モデル（DSEVAR モデル）に関して、Hatanaka〔12〕による時間領域に於ける有効推定法をあげる事が出来よう。又、（ii）VARMAX モデル（DSEVMA モデル）の有効推定法としては、Nicholls〔14〕, Kohn〔13〕があるが、前者は周波数領域、又後者は時間領域に於ける分析を行っている。ところで、(iii) DSEVARMA モデルの有効推定法としては、Reinsel〔15〕及び拙稿〔18〕をあげる事が出来るが、これらはいずれも時間領域における有効推定法を扱っている。

本稿は、DSEVARMA モデルについて、特に周波数領域における有効推定法を提示するものであり、上述した時間領域における分析に対応するものとなっている。

なお、DSEVARMA モデルは、その一部として、攪乱項が VARMA 過程に従う多変量分布ラグモデル（MDLVARMA モデル）[3] 及び VARMA モデルを含んでいる事にも注意したい。

本稿では、以下先ずⅡで、DSEVARMA モデルについて述べ、次にⅢで、DSEVARMA モデルの母数の周波数領域に於ける有効推定法を提示し、その統計的諸性質について述べる事にしたい。

Ⅱ DSEVARMA モデル

時点 t に於ける内生変数、外生変数及び攪乱項をそれぞれ m 次、n 次、m 次の列ベクトル y_t、x_t、v_t

$$
(1)\quad \begin{aligned} &y_t=(y_{t1},\ y_{t2},\ \cdots,\ y_{tm})', \qquad x_t=(x_{t1},\ x_{t2},\ \cdots,\ x_{tn})' \\ &v_t=(v_{t1},\ v_{t2},\ \cdots,\ v_{tm})' \end{aligned}
$$

で表わし、攪乱項 v_t が VARMA 過程に従う次式(2), (3)で表わされる DSE モデルを考える。

3) Multivariate Distributed Lag Model with VARMA disturbances.

(2) $A(\mathcal{L})y_t=B(\mathcal{L})x_t+v_t$

(3) $\Phi(\mathcal{L})v_t=\Theta(\mathcal{L})u_t$

但し、(3)式で u_t は独立、同一分布に従うm次の列ベクトル

(4) $u_t=(u_{t1},\ u_{t2},\ \cdots,\ u_{tm})'$

であり、$A(\mathcal{L})$, $B(\mathcal{L})$, $\Phi(\mathcal{L})$, $\Theta(\mathcal{L})$ はそれぞれラグ演算子 $\mathcal{L}$ に関する次の様な次数 a, b, p, q の多項式を表わす。

$$(5)\quad \begin{aligned} &A(\mathcal{L})=\sum_{k=0}^{a}A_k\mathcal{L}^k, && B(\mathcal{L})=\sum_{k=0}^{b}B_k\mathcal{L}^k, \\ &\Phi(\mathcal{L})=\sum_{k=0}^{p}\Phi_k\mathcal{L}^k, && \Theta(\mathcal{L})=\sum_{k=0}^{q}\Theta_k\mathcal{L}^k, \qquad \Phi_0=\Theta_0=I_m \end{aligned}$$

(5)式に於て、$A_k(k=1,2,\cdots,a)$, $B_k(k=0,1,\cdots,b)$, $\Phi_k(k=1,2,\cdots,p)$, $\Theta_k(k=1,2,\cdots,q)$ はそれぞれ $(m\times m)$ 次、$(m\times n)$ 次、$(m\times m)$ 次、$(m\times m)$ 次の係数行列である。

なお、本稿では $A_0=I_m$ と仮定する。特に y_t の同期の相互依存を考慮したい場合には、A_0 を対角要素が1である非特異行列とすればよいであろう。

さて、ここで上記(2), (3)式で表わされるモデルについて次の仮定1, 2, 3, 4を設定する。

仮定 1

u_t は互いに独立に、同一分布に従い、$E[u_t]=0$, $E[u_tu_t']=\Sigma$ とする。

仮定 2

$|A(\omega)|=0$, $|\Phi(\omega)|=0$, $|\Theta(\omega)|=0$ の根は単位円外にある。

仮定 3

外生変数 x_t は確定的であり、

$$(6)\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_tx'_{t-\tau}=R(\tau) \qquad \tau=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots$$

が存在し, $R(0)$ は非特異行列である。又、$R(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\tau\lambda}dF_x(\lambda)$ と表わすとき、x のスペクトラル分布行列 $F_x(\lambda)$ について、$dF_x(\lambda)$ $(-\pi<\lambda\leqq\pi)$ は正値定符号である。

仮定　4

(2), (3)式で表わされるモデルは識別可能である。

なお、本稿では仮定4に関して、特に $A(\omega)$, $B(\omega)$, $\Phi(\omega)$, $\Theta(\omega)$ の最大共通左分割行列 (greatest common left divisor) が単位行列であり、又 $A_k(k=1, 2, \cdots, a)$, $B_k(k=0, 1, \cdots, b)$ の各行の要素に事前に0制約が課せられ各方程式が識別可能となっており、攪乱項 v_t については VARMA 過程の次数 p, q が統計的に定められるものとする（その他の識別条件の詳細については Hannan〔7〕, Hatanaka〔11〕, Deistler〔4〕等が参考になろう)。又、外生変数に関する仮定3については、より一般的に x_t に Grenander 条件を設定する事も可能であるが、ここでは上記の標準的仮定を設ける事にする。仮定1に関してここでは正規性の仮定を必要としない事に注意したい。

さて、上記(2), (3)式で表わされるモデルは、従来の DSE モデルに於てしばしば仮定される攪乱項 (v_t) が独立、同一分布に従うとする仮定を緩め、攪乱項が定常過程に従う場合にモデルを拡張したものであり、特に攪乱項に、パラメトリックなモデルとして VARMA 過程を想定する事により、構造母数と攪乱項の確率的構造を同時に推定する事を試みるものである。VARMA 過程の想定は、定常過程の母数節約的な表現として有意味なものであろう。

本稿では、上記諸仮定を満たす、(2), (3)式で表わされる攪乱項が VARMA 過程に従う DSE モデルを、"DSEVARMA モデル" (Dynamic Simultaneous Equations Model with VARMA disturbances) と呼ぶ事にする。

Ⅲ　周波数領域に於ける母数の有効推定

本章では、DSEVARMA モデルの母数の有効推定法として、特に周波数領域に於ける2段階 Newton-Raphson 法（以下2段階 N-R 法と略記する）を提示し、その諸性質を明らかにする事にしたい。本方法に従えば、攪乱項に正規性の仮定を設ける事なく、母数の漸近的有効推定量を得る事が可能となり、又、推定量の漸近的性質を論ずる限り、原則として反復計算を回避する事が可

能である。

なお、本章で明らかにする周波数領域に於ける有効推定法は、Reinsel〔15〕及び拙稿〔18〕の時間領域に於ける有効推定法に対応するものである。

§1. 尤度関数

DSEVARMA モデルの母数推定に先立って、本節では、仮定1に加えてさらに u_t が正規分布に従う事を仮定した場合の周波数領域に於ける対数尤度関数について簡単に述べる事にしたい。

そこで先ず、各周波数 $\lambda_s(\lambda_s=\frac{2\pi s}{T},\ s=0,1,\cdots,T-1)$ に於ける y 及び x の離散フーリエ変換を $z_y(\lambda_s)$, $z_x(\lambda_s)$

$$(7)\quad \begin{aligned} z_y(\lambda_s)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{t=1}^{T} y_t e^{i\lambda_s t} \\ z_x(\lambda_s)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{t=1}^{T} x_t e^{i\lambda_s t} \end{aligned} \qquad s=0,1,\cdots,T-1$$

と表わし、y 及び x に関するピリオドグラムをそれぞれ次式(8)で表わす[4]。

$$(8)\quad \begin{aligned} I_y(\lambda_s)&=z_y(\lambda_s)z_y^*(\lambda_s), & I_x(\lambda_s)&=z_x(\lambda_s)z_x^*(\lambda_s) \\ I_{xy}(\lambda_s)&=z_x(\lambda_s)z_y^*(\lambda_s), & I_{yx}(\lambda_s)&=z_y(\lambda_s)z_x^*(\lambda_s) \end{aligned}$$

又、$A(\lambda_s)$, $B(\lambda_s)$, $\Phi(\lambda_s)$, $\Theta(\lambda_s)$ をそれぞれ次式(9)で与えられるフーリエ変換とする。

$$(9)\quad \begin{aligned} A(\lambda_s)&=\sum_{k=0}^{a} A_k e^{i\lambda_s k}, & B(\lambda_s)&=\sum_{k=0}^{b} B_k e^{i\lambda_s k} \\ \Phi(\lambda_s)&=\sum_{k=0}^{p} \Phi_k e^{i\lambda_s k}, & \Theta(\lambda_s)&=\sum_{k=0}^{q} \Theta_k e^{i\lambda_s k} \end{aligned}$$

このとき、Tが十分に大きい場合には、DSEVARMA モデルの対数尤度関数 $\log L$ を近似的に、

$$(10)\quad \log L=-\frac{T}{2}\log|\Sigma|-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{T-1}\mathrm{tr}(f_v(\lambda_s)^{-1}I_v(\lambda_s))+c$$

と表現する事が出来る。但し、(11)式で $f_v(\lambda_s)$, $I_v(\lambda_s)$ はそれぞれ周波数 λ_s に

4) 記号＊は、行列ないしベクトルの“複素共役転置”を示す。

於ける v のスペクトラル密度行列及びピリオドグラムを表わし、次式(11), (12)の如く与えられる。

$$(11)\quad f_v(\lambda_s)=\frac{1}{2\pi}\Phi(\lambda_s)^{-1}\Theta(\lambda_s)\ \Sigma\ \Theta^*(\lambda_s)\Phi^*(\lambda_s)^{-1}$$

$$(12)\quad \begin{aligned} I_v(\lambda_s)=&A(\lambda_s)I_y(\lambda_s)A^*(\lambda_s)+B(\lambda_s)I_x(\lambda_s)B^*(\lambda_s)\\ &-B(\lambda_s)I_{xy}(\lambda_s)A^*(\lambda_s)-A(\lambda_s)I_{yx}(\lambda_s)B^*(\lambda_s)\end{aligned}$$

上記の対数尤度関数(10)式は，以後の周波数領域に於ける分析の基礎となるものである。

ところで、先に進む前にここで(10)式を、以下に述べる様な循環性の仮定により、より直接的に導出する事が可能となる事に留意したい。

即ち、y_t, x_t, v_t, u_t の初期値に関して特に次式(13)で表わされる様な循環性の仮定を設定してみよう。

$$(13)\quad \begin{array}{llll} y_{-t}=y_{T-t} & t=0,1,\cdots,a-1 & x_{-t}=x_{T-t} & t=0,1,\cdots,b-1\\ v_{-t}=v_{T-t} & t=0,1,\cdots,p-1 & u_{-t}=u_{T-t} & t=0,1,\cdots,q-1\end{array}$$

このとき、(T×T) 次の行列 M

$$(14)\quad M=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ I_{T-1} & 0\end{pmatrix}$$

を用いる事により、上記循環性の仮定の下で、DSEVARMA モデル ((2), (3)式) をより簡潔に次の(15), (16)式の様に表わせる事がわかる。

$$(15)\quad Ay=Bx+v$$

$$(16)\quad \Phi v=\Theta u$$

但し、(15), (16)式で

$$(17)\quad \begin{array}{ll} y=\mathrm{Vec}(Y),\quad x=\mathrm{Vec}(X), & v=\mathrm{Vec}(V),\quad u=\mathrm{Vec}(U)\\ Y'=(y_1, y_2, \cdots, y_T), & X'=(x_1, x_2, \cdots, x_T)\\ V'=(v_1, v_2, \cdots, v_T), & U'=(u_1, u_2, \cdots, u_T)\\ A=\sum_{k=0}^{a}(A_k\otimes M^k), & B=\sum_{k=0}^{b}(B_k\otimes M^k)\\ \Phi=\sum_{k=0}^{p}(\Phi_k\otimes M^k), & \Theta=\sum_{k=0}^{q}(\Theta_k\otimes M^k)\end{array}$$

を意味するものとする[5)]。

(16)式で u の平均ベクトル及び分散共分散行列はそれぞれ

$$(18)\quad E[u]=0, \qquad E[uu']=\Omega=\Sigma\otimes I_T$$

となる。

さてここで、$\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i\lambda_s t}$ を第 $(s+1, t)$ 要素 $(s=0,1,\cdots,T-1,\ t=1,2\cdots,T)$ として持つ $(T\times T)$ 次のユニタリー行列を W とし、又 D を $(T\times T)$ 次の対角行列 $D=\mathrm{Diag}\{e^{i\lambda_0},\cdots,e^{i\lambda_{T-1}}\}$ とするとき，(14)式で定義した行列 M に関して

$$(19)\quad WM=DW$$

が成立する事に注意すれば、若干の計算の後、(15)，(16)式で表わされるモデルの尤度関数を、

$$(20)\quad \log L=-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{T-1}\log|f_v(\lambda_s)|-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{T-1}\mathrm{tr}(f_v(\lambda_s)^{-1}I_v(\lambda_s)) + \sum_{s=0}^{T-1}\log|A(\lambda_s)|+c$$

と表わせる事がわかる。

従って、T が十分大きいとき、(20)式を(10)式で近似する事を考えれば、周波数領域における表現と循環性の仮定の間に密接な関連のある事が理解されよう。特にトレンドを含む経済時系列の分析にあたって、上述した循環性の仮定が妥当なものであるか否かについては問題が残されているであろうが、同仮定は周波数領域に於ける分析の一助となる点で有意味なものと言えるであろう。

§2. 2段階 Newton-Raphson 法

II章で述べた如く、モデルの識別条件より、行列 $A_k(k=1,2,\cdots,a)$, $B_k(k=0,1,\cdots,b)$ の幾つかの要素には予め0制約が課せられているものとする。そ

5) 一般に、H を $(h_1\times h_2)$ 次の行列とするとき、Vec(H) は、H の第 (i, j) 要素を第 $(h_1(j-1)+i)$ 要素として持つ h_1h_2 次の列ベクトルを示す。記号 ⊗ は、行列のクロネッカー積を示す。

こで0でない要素（それらの数をそれぞれ $d(A_k)$ $(k=1,2,\cdots,a)$, $d(B_k)(k=0,1,\cdots,b)$ とする）をそれぞれ $d(A_k)$ 次、$d(B_k)$ 次の列ベクトル μ_{A_k}, μ_{B_k} によって次の如く表わす事にしよう。

$$(21)\quad \begin{aligned} \mu_{A_k} &= I_{m^2}(A_k)\,\mathrm{Vec}(A_k) \qquad & k=1,2,\cdots,a \\ \mu_{B_k} &= I_{mn}(B_k)\,\mathrm{Vec}(B_k) \qquad & k=0,1,\cdots,b \end{aligned}$$

但し、一般にXを $(m\times n)$ 次の行列とし、その $d(X)$ 個の要素 $(0<d(X)\leqq mn)$ が非0であり、残りの $(mn-d(X))$ 個の要素が0であるものとするとき、行列 $I_{mn}(X)$ は、行列Xの第 (i,j) 要素が0であるとき、mn 次の単位行列 I_{mn} より対応する第 $(m(j-1)+i)$ 番目の行を除去して出来る $(d(X)\times mn)$ 次の行列を示すものとする。

ところで、攪乱項 v_t に関しては、多くの場合(3)式で表わされる VARMA 過程の母数に予め0制約が課せられている事は少ないであろう。但し、本稿ではより一般にその様な可能性をも考慮して、行列 $\Phi_k(k=1,2,\cdots,p)$, $\Theta_k(k=1,2,\cdots,q)$ の0でない $d(\Phi_k)$, $d(\Theta_k)$ 個の要素をそれぞれ $d(\Phi_k)$ 次, $d(\Theta_k)$ 次の列ベクトル μ_{Φ_k}, μ_{Θ_k} によって次の如く表わす事にする。

$$(22)\quad \begin{aligned} \mu_{\Phi_k} &= I_{m^2}(\Phi_k)\,\mathrm{Vec}(\Phi_k) \qquad & k=1,2,\cdots,p \\ \mu_{\Theta_k} &= I_{m^2}(\Theta_k)\,\mathrm{Vec}(\Theta_k) \qquad & k=1,2,\cdots,q \end{aligned}$$

なお、0制約が課せられておらず、行列のすべての要素が推定の対象となる場合には、上記(21), (22)式で $I_{mn}(\cdot)$, $I_{m^2}(\cdot)$ をそれぞれ単位行列 I_{mn}, I_{m^2} とすればよい。

そこで、以後の便宜のために、推定すべき母数を次式の如く、d 次 $(d=\sum_{k=1}^{a}d(A_k)+\sum_{k=0}^{b}d(B_k)+\sum_{k=1}^{p}d(\Phi_k)+\sum_{k=1}^{q}d(\Theta_k))$ の列ベクトル μ で表わす事にする。

$$(23)\quad \mu=(\mu_A', \mu_B', \mu_\Phi', \mu_\Theta')'$$

$$(24)\quad \begin{aligned} \mu_A &= (\mu_{A_1}', \mu_{A_2}', \cdots, \mu_{A_a}')', \qquad & \mu_B &= (\mu_{B_0}', \mu_{B_1}', \cdots, \mu_{B_b}')' \\ \mu_\Phi &= (\mu_{\Phi_1}', \mu_{\Phi_2}', \cdots, \mu_{\Phi_p}')', \qquad & \mu_\Theta &= (\mu_{\Theta_1}', \mu_{\Theta_2}', \cdots, \mu_{\Theta_q}')' \end{aligned}$$

従って問題は、DSEVARMA モデルの母数 μ 及び Σ を推定する事である。

そこで先ず、周波数領域に於ける対数尤度関数(10)式をもとに、μに関する集約対数尤度関数 $\log \bar{L}$ を求めれば、

$$(25)\quad \log \bar{L} = -\frac{T}{2}\log|\bar{\Sigma}| + c$$

を得る。但し、(25)式で

$$(26)\quad \bar{\Sigma} = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=0}^{T-1} z_u(\lambda_s) z_u{}^*(\lambda_s)$$

であり、$z_u(\lambda_s)$ は(31)式で与えられる。

ところで、(25)式に基づく対数尤度方程式 $\dfrac{\partial \log \bar{L}}{\partial \mu} = 0$ はμに関する極めて複雑な非線型方程式となり、一般にこれを代数的に解く事は不可能となる。

そこで本稿では、以下に述べる様な2段階 N-R 法を提示し、その統計的諸性質を明らかにする事にしたい。

即ち、先ず第1段階として、μ, Σ の一致推定量を求め、それらを $\tilde{\mu}$, $\tilde{\Sigma}$ と表わす（一致推定量を求める方法については後述する事にする)。次に、第2段階として、(25)式に関して $\tilde{\mu}$, $\tilde{\Sigma}$ を初期値とした N-R 関係式を求めれば、若干の計算の後、次式(27)を得る。

$$(27)\quad \tilde{G}^* \tilde{\Pi}^{-1} \tilde{G}(\hat{\mu} - \tilde{\mu}) = \tilde{G}^* \tilde{\Pi}^{-1} \tilde{\Phi} z_{\tilde{v}}$$

但し上式(27)で、G, Π, Φ, z_v はそれぞれ具体的に以下の(28)〜(31)式の如く与えられ、又、記号“〜”は、対応するそれぞれの行列ないしベクトルが、第1段階で求めた一致推定量 $\tilde{\mu}$, $\tilde{\Sigma}$ を用いて評価される事を意味するものである。(27)式で先ず行列Gは次の如く与えられる。

$$G = (G_A,\ G_B,\ G_\Phi,\ G_\Theta)$$

$$G_A = -\begin{pmatrix} \Phi(\lambda_0)\,(z_y{}'(\lambda_0) \otimes I_m)\, E_{\lambda_0}(A) \\ \vdots \\ \Phi(\lambda_{T-1})\,(z_y{}'(\lambda_{T-1}) \otimes I_m)\, E_{\lambda_{T-1}}(A) \end{pmatrix} I'(A)$$

$$(28)\quad G_B = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda_0)\,(z_x{}'(\lambda_0) \otimes I_m)\, E_{\lambda_0}(B) \\ \vdots \\ \Phi(\lambda_{T-1})\,(z_x{}'(\lambda_{T-1}) \otimes I_m)\, E_{\lambda_{T-1}}(B) \end{pmatrix} I'(B)$$

$$G_{\Phi}=-\begin{pmatrix}(z_v'(\lambda_0)\otimes I_m)E_{\lambda_0}(\Phi)\\ \vdots \\ (z_v'(\lambda_{T-1})\otimes I_m)E_{\lambda_{T-1}}(\Phi)\end{pmatrix}I'(\Phi)$$

$$G_{\Theta}=\begin{pmatrix}(z_u'(\lambda_0)\otimes I_m)E_{\lambda_0}(\Theta)\\ \vdots \\ (z_u'(\lambda_{T-1})\otimes I_m)E_{\lambda_{T-1}}(\Theta)\end{pmatrix}I'(\Theta)$$

但し、(28)式で $E_{\lambda_s}(A)$, $E_{\lambda_s}(B)$, $E_{\lambda_s}(\Phi)$, $E_{\lambda_s}(\Theta)$ 及び $I(A)$, $I(B)$, $I(\Phi)$, $I(\Theta)$ はそれぞれ次式(29)及び(30)を意味するものとする。

$$(29)\quad \begin{aligned} E_{\lambda_s}(A)&=(e^{i\lambda_s 1}I_{m^2},\ \cdots,\ e^{i\lambda_s a}I_{m^2})\\ E_{\lambda_s}(B)&=(e^{i\lambda_s 0}I_{mn},\ \cdots,\ e^{i\lambda_s b}I_{mn})\\ E_{\lambda_s}(\Phi)&=(e^{i\lambda_s 1}I_{m^2},\ \cdots,\ e^{i\lambda_s p}I_{m^2})\\ E_{\lambda_s}(\Theta)&=(e^{i\lambda_s 1}I_{m^2},\ \cdots,\ e^{i\lambda_s q}I_{m^2})\end{aligned}$$

$$(30)\quad \begin{aligned} I(A)&=\mathrm{Diag}\{I_{m^2}(A_1),\ \cdots,\ I_{m^2}(A_a)\}\\ I(B)&=\mathrm{Diag}\{I_{mn}(B_0),\ \cdots,\ I_{mn}(B_b)\}\\ I(\Phi)&=\mathrm{Diag}\{I_{m^2}(\Phi_1),\ \cdots,\ I_{m^2}(\Phi_p)\}\\ I(\Theta)&=\mathrm{Diag}\{I_{m^2}(\Theta_1),\ \cdots,\ I_{m^2}(\Theta_q)\}\end{aligned}$$

さらに、Π, Φ, z_y, z_v, z_u はそれぞれ次式(31)の如く与えられる。

$$(31)\quad \begin{aligned} \Pi&=\mathrm{Diag}\{f_z(\lambda_0),\ \cdots,\ f_z(\lambda_{T-1})\}, \qquad f_z(\lambda_s)=\frac{1}{2\pi}\Theta(\lambda_s)\,\Sigma\,\Theta^*(\lambda_s)\\ \Phi&=\mathrm{Diag}\{\Phi(\lambda_0),\ \cdots,\ \Phi(\lambda_{T-1})\}\\ z_y&=(z_y'(\lambda_0),\ \cdots,\ z_y'(\lambda_{T-1}))'\\ z_v&=(z_v'(\lambda_0),\ \cdots,\ z_v'(\lambda_{T-1}))', \qquad z_v(\lambda_s)=A(\lambda_s)z_y(\lambda_s)-B(\lambda_s)z_x(\lambda_s)\\ z_u&=(z_u'(\lambda_0),\ \cdots,\ z_u'(\lambda_{T-1}))', \qquad z_u(\lambda_s)=\Theta(\lambda_s)^{-1}\Phi(\lambda_s)z_v(\lambda_s)\end{aligned}$$

(27)式は、$\log\bar{L}$ の2階微分に関して $o_p(T)$ の部分を無視して得られたものであるが、この様にしても推定量の漸近分布に影響のない事は明らかであろう。但し、(27)式左辺で、さらに $\underset{T\to\infty}{\mathrm{p\,lim}}\frac{1}{T}G_B{}^*\Pi^{-1}G_\Phi=0$, $\underset{T\to\infty}{\mathrm{p\,lim}}\frac{1}{T}G_B{}^*\Pi^{-1}G_\Theta=0$ であるが、これらの部分は表記の都合上(27)式に含める事にする。

ところでさらに、

$$(32)\quad \tilde{G}\tilde{\mu}+\tilde{\Phi}z_{\tilde{v}}=\tilde{\Phi}z_y+z_{\tilde{v}}-z_{\tilde{u}}$$

に注意すれば、(27)式を別に、

$$(33)\quad \tilde{G}^{*}\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{G}\hat{\mu}=\tilde{G}^{*}\tilde{\Pi}^{-1}(\tilde{\Phi}z_{y}+z_{\tilde{v}}-z_{\tilde{u}})$$

と表現出来る事になる。

従って、以上の事から、DSEVARMA モデルについて、周波数領域に基づく次の様な2段階 N-R 法を提示する事が出来るであろう。

第1段階

先ず第1段階として、μ 及び Σ の一致推定量 $\tilde{\mu}$, $\tilde{\Sigma}$ を次の様にして求める。即ち、適当な操作変数を用いて μ_A, μ_B の一致推定量 $\tilde{\mu}_A$, $\tilde{\mu}_B$ を求め、これらをもとに $\tilde{v}_t=\tilde{A}(\mathcal{L})y_t-\tilde{B}(\mathcal{L})x_t$ を求める。次に、$\tilde{v}_t$ をもとに Yule-Walker 方程式より μ_Φ の一致推定量 $\tilde{\mu}_\Phi$ を求め、$\tilde{z}_t=\tilde{\Phi}(\mathcal{L})\tilde{v}_t$ とする。最後に、$\tilde{z}_t$ に関するスペクトラル密度行列 $\tilde{f}_z(\lambda)$ を求め、これより μ_Θ, Σ の一致推定量 $\tilde{\mu}_\Theta$, $\tilde{\Sigma}$ を求める。$\tilde{\mu}_\Theta$, $\tilde{\Sigma}$ を求める方法としては、Hannan〔8〕の方法、ないし $\tilde{f}_z(\lambda)$ がエルミート非負値定符号行列である場合にはその分解を行う事（例えば Robinson〔16〕）が考えられよう。

第2段階

次に第2段階として、第1段階で求めた一致推定量 $\tilde{\mu}$, $\tilde{\Sigma}$ をもとにして、次式(34)

$$(34)\quad \tilde{G}^{*}\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{G}\hat{\mu}=\tilde{G}^{*}\tilde{\Pi}^{-1}(\tilde{\Phi}z_{y}+z_{\tilde{v}}-z_{\tilde{u}})$$

より μ の推定量 $\tilde{\mu}$ を求める。Σ は、

$$(35)\quad \hat{\Sigma}=\frac{2\pi}{T}\sum_{s=0}^{T-1}z_{\tilde{u}}(\lambda_s)z_{\tilde{u}}^{*}(\lambda_s)$$

により推定すればよい。

以後この様な2段階 N-R 法によって求められる推定量 $\hat{\mu}$ 及び $\hat{\Sigma}$ を、μ 及び Σ の2段階 N-R 推定量と呼ぶ事にする。

ところで、Dunsmuir and Hannan〔5〕, Hannan〔8〕に従えば、この様にして得られる2段階 N-R 推定量 $\hat{\mu}$ について、次の定理を示す事が出来る。

定　理

（２），（３）式で表わされる DSEVARMA モデルについて、仮定１，２，３，４の下で、(34)式から得られる μ の２段階 N-R 推定量を $\hat{\mu}$ とするとき、（ｉ）$\hat{\mu}$ は μ の一致推定量であり、（ii）$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ は $T\to\infty$ のとき多変量正規分布 $N(0, W^{-1})$ に法則収束する。但し、W は

$$(36)\quad W=\operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G^{*}\Pi^{-1}G$$

であり、その各要素は具体的にそれぞれ以下の如く与えられる。

$$(37)\quad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{A}^{*}\Pi^{-1}G_{A}$$

$$=I(A)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(A)\,(dF_{y}'(\lambda)\otimes f_{v}(\lambda)^{-1})\,E_{\lambda}(A)\right\}I'(A)$$

$$(38)\quad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{A}^{*}\Pi^{-1}G_{B}$$

$$=-I(A)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(A)\,((dF_{x}(\lambda)\,B^{*}(\lambda)\,A^{*}(\lambda)^{-1})'\otimes f_{v}(\lambda)^{-1})\,E_{\lambda}(B)\right\}I'(B)$$

$$(39)\quad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{A}^{*}\Pi^{-1}G_{\Phi}$$

$$=I(A)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(A)\,((f_{v}(\lambda)\,A^{*}(\lambda)^{-1})'\otimes\Phi^{*}(\lambda)\,f_{z}(\lambda)^{-1})E_{\lambda}(\Phi)d\lambda\right\}I'(\Phi)$$

$$(40)\quad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{A}^{*}\Pi^{-1}G_{\Theta}$$

$$=-I(A)\left\{\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(A)\,((\Sigma\,\Theta^{*}(\lambda)\,\Phi^{*}(\lambda)^{-1}A^{*}(\lambda)^{-1})'\right.$$
$$\left.\otimes\Phi^{*}(\lambda)\,f_{z}(\lambda)^{-1})\,E_{\lambda}(\Theta)d\lambda\right\}I'(\Theta)$$

$$(41)\quad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G^{*}{}_{B}\Pi^{-1}G_{B}$$

$$=I(B)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(B)\,(dF_{x}'(\lambda)\otimes f_{v}(\lambda)^{-1})\,E_{\lambda}(B)\right\}I'(B)$$

$$(42)\quad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{B}^{*}\Pi^{-1}G_{\Phi}=0\ ,\qquad \operatorname*{p\,lim}_{T\to\infty}G_{B}^{*}\Pi^{-1}G_{\Theta}=0$$

(43) $\operatorname{p}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{\Phi}^{*}\Pi^{-1}G_{\Phi}$

$$=I(\Phi)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(\Phi)\left(f_{v}'(\lambda)\otimes f_{z}(\lambda)^{-1}\right)E_{\lambda}(\Phi)\,d\lambda\right\}I'(\Phi)$$

(44) $\operatorname{p}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{\Phi}^{*}\Pi^{-1}G_{\Theta}$

$$=-I(\Phi)\left\{\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(\Phi)\left(\left(\Sigma\,\Theta^{*}(\lambda)\Phi^{*}(\lambda)^{-1}\right)'\otimes f_{z}(\lambda)^{-1}\right)E_{\lambda}(\Theta)\,d\lambda\right\}I'(\Theta)$$

(45) $\operatorname{p}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}G_{\Theta}^{*}\Pi^{-1}G_{\Theta}$

$$=I(\Theta)\left\{\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-\pi}^{\pi}E_{\lambda}^{*}(\Theta)\left(\Sigma\otimes f_{z}(\lambda)^{-1}\right)E_{\lambda}(\Theta)\,d\lambda\right\}I'(\Theta)$$

但し、(37)～(45)式に於て

$$A(\lambda)=\sum_{k=0}^{a}A_{k}e^{i\lambda k}\ ,\qquad B(\lambda)=\sum_{k=0}^{b}B_{k}e^{i\lambda k}\qquad(-\pi<\lambda\leqq\pi)$$

$$\Phi(\lambda)=\sum_{k=0}^{p}\Phi_{k}e^{i\lambda k}\ ,\qquad \Theta(\lambda)=\sum_{k=0}^{q}\Theta_{k}e^{i\lambda k}$$

(46) $f_{v}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Phi(\lambda)^{-1}\Theta(\lambda)\,\Sigma\,\Theta^{*}(\lambda)\Phi^{*}(\lambda)^{-1}$

$$f_{z}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\Theta(\lambda)\,\Sigma\,\Theta^{*}(\lambda)$$

$$E_{\lambda}(A)=(e^{i\lambda1}I_{m^{2}},\ \cdots,\ e^{i\lambda a}I_{m^{2}})\ ,\quad E_{\lambda}(B)=(e^{i\lambda0}I_{mn},\ \cdots,\ e^{i\lambda b}I_{mn})$$

$$E_{\lambda}(\Phi)=(e^{i\lambda1}I_{m^{2}},\ \cdots,\ e^{i\lambda p}I_{m^{2}})\ ,\quad E_{\lambda}(\Theta)=(e^{i\lambda1}I_{m^{2}},\ \cdots,\ e^{i\lambda q}I_{m^{2}})$$

を意味するものとする。

ところで，この様にして得られた２段階 N-R 推定量 $\hat{\mu}$ が、u_t に正規性を仮定して得られる最尤推定量と同一の漸近分布を持つ事から、$\hat{\mu}$ が漸近的有効推定量となっている事が理解されよう。又、この様な２段階 N-R 推定法に従えば、原則として反復計算を回避出来る事にも改めて注意したい。但し、一般に標本数の少ない場合には、初期値の選択が推定量に与える影響を除去するために反復計算を行う事が好ましいであろう。

なお最後に、上述した2段階 N-R 推定量 $\hat{\mu}$ が、以下に述べる様な一般化最小2乗推定量（GLSE）と同値である事を明らかにしたい。

そのために、先ず(34)式右辺の $\tilde{\Phi}z_y+z_v-z_{\tilde{u}}$ が、若干の整理の後、

$$(47)\quad \tilde{\Phi}z_y+z_v-z_{\tilde{u}}=\tilde{G}\mu+\tilde{\Theta}z_u+R$$

と表現出来る事に注意したい。ここで、Θ は(31)式の Φ と同様に

$$(48)\quad \Theta=\mathrm{Diag}\{\Theta(\lambda_0),\ \cdots,\ \Theta(\lambda_{T-1})\}$$

によって与えられ、又Rは、漸近的に無視可能な残余項である。

そこで、Σ を一致推定量 $\tilde{\Sigma}$ で推定する事により、$E[(\tilde{\Theta}z_u)(\tilde{\Theta}z_u)^*]$ を $\tilde{\Pi}$ で推定する事を考えれば、上述した2段階 N-R 推定量 $\hat{\mu}$ が、(47)式に関する周波数領域に於ける GLSE となっている事が理解されよう。上述した2段階 N-R 推定量の GLSE としての解釈は、Reinsel〔15〕による時間領域に於ける解釈に対応するものとなっている。

§3. 他のモデルとの関連性

最後に、DSEVARMA モデルに関連するその他の諸モデルについて、その有効推定法を上述した2段階有効推定法との関連から簡単に整理する事にしたい。

先ず、DSEVARMA モデルで、$I(\Theta)=0$ ないし $I(\Phi)=0$ とする事により、VARARX モデル（DSEVAR モデル）ないし VARMAX モデル（DSEVMA モデル）の有効推定法を得る事が出来る。これらの方法はI章で述べた Hatanaka〔12〕の周波数領域に於ける有効推定法となっており、又、Nicholls〔14〕の方法と一致している。

次に、DSEVARMA モデルで $I(A)=0$ とすれば、I章で述べた MDLVARMA モデルの有効推定法が得られる事になる。DSEVARMA モデルの場合と比較して、MDLVARMA モデルに於ては、特に $\mu_1=\mu_B$ と $\mu_2=(\mu_\Phi', \mu_\Theta')'$ の推定を分離して行える事が大きな相異点であろう。即ちこの場合には、$G_1=G_B$, $G_2=(G_\Phi, G_\Theta)$ として、それぞれ

(49) $\tilde{G}_1{}^* \tilde{\Pi}^{-1} \tilde{G}_1 \hat{\mu}_1 = \tilde{G}_1{}^* \tilde{\Pi}^{-1} \tilde{\Phi} z_y$

(50) $\tilde{G}_2{}^* \tilde{\Pi}^{-1} \tilde{G}_2 \hat{\mu}_2 = \tilde{G}_2{}^* \tilde{\Pi}^{-1} (z_{\tilde{v}} + \tilde{\Theta} z_{\tilde{u}} - z_{\tilde{u}})$

より μ_1, μ_2 の2段階 N-R 推定量 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ を求める事が出来る。$\sqrt{T}(\hat{\mu}_1-\mu_1)$, $\sqrt{T}(\hat{\mu}_2-\mu_2)$ は $T\to\infty$ のとき、それぞれ $N(0, W_1{}^{-1})$, $N(0, W_2{}^{-1})$ に法則収束し、W_1 は(41)式、又 W_2 の各成分は(43), (44), (45)式で与えられる。又両者は互いに漸近的無相関となる。なお、上記の方法が、Hannan〔6〕に於て攪乱項に VARMA 過程を想定したモデルの有効推定法となっている事に注意したい。

さらに、VARMA 過程は、DSEVARMA モデルで $I(A)=0$, $I(B)=0$, $y_t=v_t$ とした場合に対応している。この場合には、前述した(50)式より $\mu(=\mu_2)$ の2段階 N-R 推定量 $\hat{\mu}(=\hat{\mu}_2)$ を求める事ができ、$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu)$ は $T\to\infty$ のとき $N(0, W^{-1})$ に法則収束し、W の各成分は(43), (44), (45)式により与えられる事がわかる。この結果は Hannan〔8〕, Akaike〔1〕等の結果と一致している。

又、DSEVARMA モデルで、特に $m=n=1$ とし、対応する諸量のスカラーの場合の関係式を求めれば、種々の1変量モデルに関する有効推定法を容易に導く事が出来る。

Ⅳ 結 語

本稿で我々は、DSE モデルに関して、攪乱項が独立、同一分布に従うとする従来の仮定を緩め、これに代わって攪乱項が VARMA 過程に従う DSEVARMA モデルを構築した上で、母数の有効推定法として、特に周波数領域に於ける2段階 N-R 法を提示し、推定量の統計的諸性質を明らかにした。

ところで、DSEVARMA モデルを使用するにあたって、特にモデルの次数を如何に決定するかが重要な問題となろう。この問題に関しては、例えば AIC (Akaike〔2〕) を用いてその次数を決定する事が考えられるであろうが、その他の方法と共に今後さらに検討を加える必要があろう。又、母数推定に関し

て、周波数領域に於ける有効推定法と、時間領域に於ける有効推定法の比較検討を行う事も必要となるであろう。

DSEVARMA モデルに関しては今後さらに論究する所存であるが、本稿で、母数推定に関する基本的な諸性質をいくらかでも明らかにする事が出来たとするならば、当初の目的は一応達せられたものと言えよう。

(筆者は関西学院大学商学部助教授)

<参考文献>

〔1〕 Akaike, H., "Maximum Likelihood Identification of Gaussian Autoregressive Moving Average Models," Biometrika, 60 (1973), 225—265.

〔2〕 Akaike, H., "A New Look at the Statistical Model Identification," IEEE. Trans., AC-19 (1974), 716—723.

〔3〕 Anderson, T. W., "Maximum Likelihood Estimation of Parameters of an Autoregressive Process with Moving Average Residuals and Other Covariance Matrices with Linear Structure," A. S., 3 (1975), 1283—1304.

〔4〕 Deistler, M., "Z-Transform and Identification of Linear Econometric Models with Autocorrelated Errors," Metrika, 22 (1975), 13—25.

〔5〕 Dunsmuir, W. and E. J. Hannan, "Vector Linear Time Series Models," Adv. in App. Prob., 8 (1976), 339—364.

〔6〕 Hannan, E. J., "The Estimation of a Lagged Regression Relation," Biometrika, 54 (1967), 409—418.

〔7〕 Hannan, E. J., "The Identification of Vector Mixed Autoregressive Moving Average Systems," Biometrika, 56 (1969), 223—225.

〔8〕 Hannan, E. J., Multiple Time Series, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.

〔9〕 Hannan, E. J. and R. D. Terrell, "Multiple Equation Systems with Stationary Errors," Econometrica, 41 (1973), 299—320.

〔10〕 Hannan, E. J., "The Central Limit Theorem for Time Series Regression," J. Stoch. Proc. Appl., 9 (1979), 281—289.

〔11〕 Hatanaka, M., "On the Global Identification of the Dynamic Simultaneous Equations Model with Stationary Disturbances," I. E. R., 16 (1975), 545—554.

〔12〕 Hatanaka, M., "Several Efficient Two-Step Estimators for the Dynamic Simultaneous Equations Model with Autoregressive Disturbances," J. Econometrics, 4 (1976), 189—204.

〔13〕 Kohn, R., "Asymptotic Estimation and Hypothesis Testing Results for Vector Linear Time Series Models," Econometrica, 47 (1979), 1005—1030.

〔14〕 Nicholls, D. F., "The Efficient Estimation of Vector Linear Time Series Models," Biometrika, 63 (1976), 381—390.

〔15〕 Reinsel, G., "FIML Estimation of the Dynamic Simultaneous Equations Model with ARMA Disturbances," J. Econometrics, 9 (1979), 263—281.

〔16〕 Robinson, E. A., Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs, Holden-Day, San Francisco, 1967.

〔17〕 Sugihara, S., "Statistical Estimation of the Dynamic Linear Equation Model with Autoregressive-Moving Average Errors," Kwansei Gakuin University Annual Studies, 23 (1974), 81—88.

〔18〕 杉原左右一,「多変量時系列モデルとその統計的解析」、商学論究、第27巻第1，2，3，4号合併号、1980、511—534。